

## Unidad 2

### Propiedades Mecánicas de los Materiales

---

#### 2.1 Objetivos

Al terminar el estudio de esta unidad usted deberá ser capaz de resolver los siguientes objetivos trazados para el Estudio de tensiones normales y cortantes en sistemas Isostáticos.

1. Definir las deformaciones unitarias.
2. Enunciar la “Ley de Hooke”
3. Relacionar las deformaciones con las fuerzas aplicada
4. Describir el procedimiento para efectuar la prueba estándar de tensión ( $\sigma$ ) - deformación unitaria ( $\epsilon$ ) y a partir de esta prueba definir las propiedades mecánicas que se presentan en el diagrama.
5. Describir un método para determinar el punto de fluencia en materiales que no se presenta bien definido.
6. Clasificar los materiales de acuerdo a su comportamiento mecánico
7. Describir la relación de Poissón
8. Conocer o estudiar las tensiones admisibles y sus valores que podemos adoptar de trabajo de los distintos materiales.
9. Aprender a resolver problemas de tensión ( $\sigma$ ) y deformación ( $\delta$ ), que obedezcan la Ley de Hooke en elementos o sistemas Isostáticos sometidos a esfuerzos normales simples.

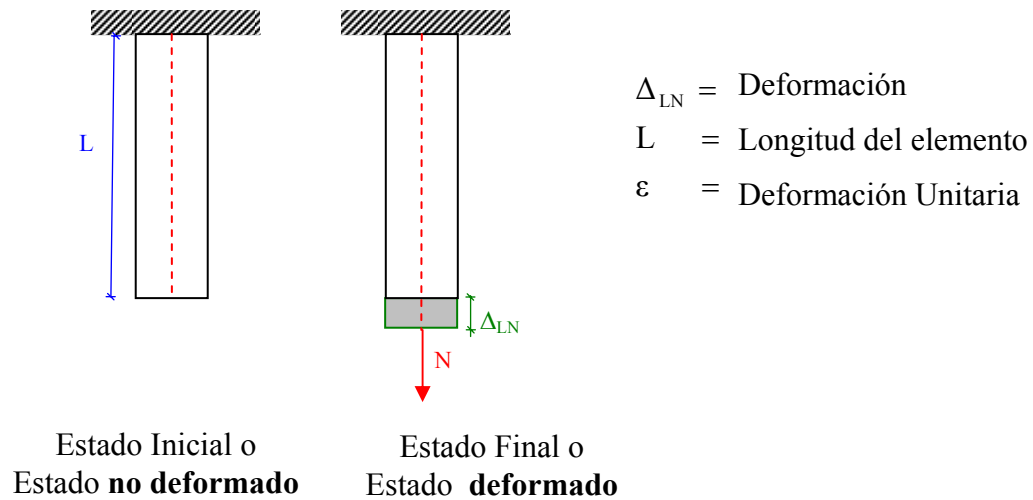
#### 2.2 Introducción

En la unidad anterior nos dedicamos fundamentalmente a estudiar los conceptos básicos que relaciona la fuerza (carga) con los esfuerzos o tensiones. En esta unidad nos ocuparemos de estudiar los cambios de forma de los materiales en otras palabras sus deformaciones y sus relaciones que existen con las fuerzas y los esfuerzos (tensiones). Examinaremos las propiedades mecánicas de los materiales interpretando su comportamiento de acuerdo a las hipótesis planteadas. Además conoceremos que son las tensiones admisibles.

## 2.3 Deformaciones Unitarias

### 2.3.1 Deformaciones Unitarias Normales

Sea un elemento sometido a fuerzas normales como muestra la figura:

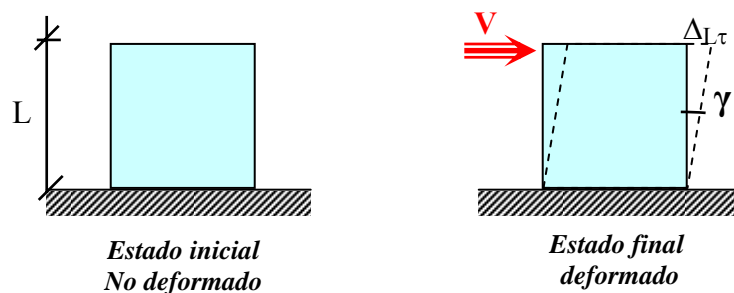


Aplicando la hipótesis de Bernoulli podemos definir:

$$\varepsilon = \frac{\Delta_{LN}}{L} \frac{\text{cm}}{\text{cm}} \quad \begin{array}{l} \text{Deformación} \\ \text{Unitaria} \end{array}$$

### 2.3.2 Deformaciones Unitarias Transversales o Distorsión angular

Sea un elemento sometido su sección a fuerzas transversales como muestra el esquema de la figura:



Aplicando Bernoulli podemos definir:

$$\gamma = \frac{\Delta L \tau}{L}$$

Distorsión angular

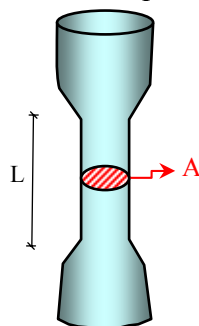
## 2.4 Prueba estándar de tensión ( $\sigma$ ) – deformación unitaria ( $\epsilon$ ) del Acero Dulce

La resistencia de un material depende de muchas propiedades de los materiales la mas importante es la capacidad para soportar cargas sin deformación excesiva o falla. En menor grado depende de otras como ser la dureza, la tenacidad y la ductilidad que influyen en la decisión de elección de un material. Todas estas propiedades se determinan mediante ensayos de materiales en laboratorio, en el transcurso del tiempo se han standardizado, de modo de comparar los resultados obtenidos, por ejemplo en Estados Unidos, la American Society for Testing and Materials (ASTM) ha publicado pautas y lineamientos para llevar a cabo tales pruebas y proporcionar limites de los cuales es aceptable el uso de material determinado.

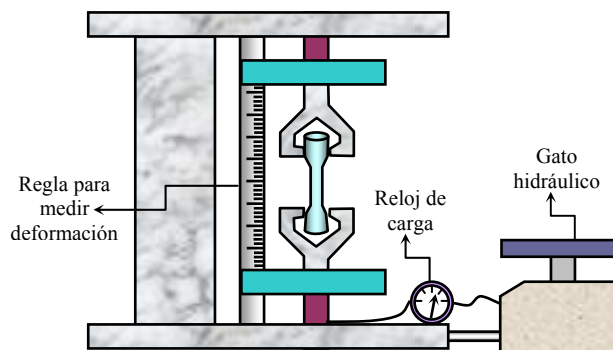
Examinaremos uno de ellos el **Ensayo de Tracción en el acero dulce**, dada su importancia y su inestimable ayuda que nos proporciona en la introducción de conceptos básicos respecto a comportamiento mecánico de los materiales.

### 2.4.1 Diagrama de tensión – deformación unitaria

Este ensayo consiste en aplicar a una probeta de dimensiones estándares, una carga que incrementa gradualmente, anotando las lecturas de los valores de cargas y deformaciones correspondientes hasta que se produce la rotura. Esta prueba se la realiza mediante una maquina conocida con el nombre de “**Maquina Universal**”, como muestra el esquema.



Probeta de  
Acero dulce



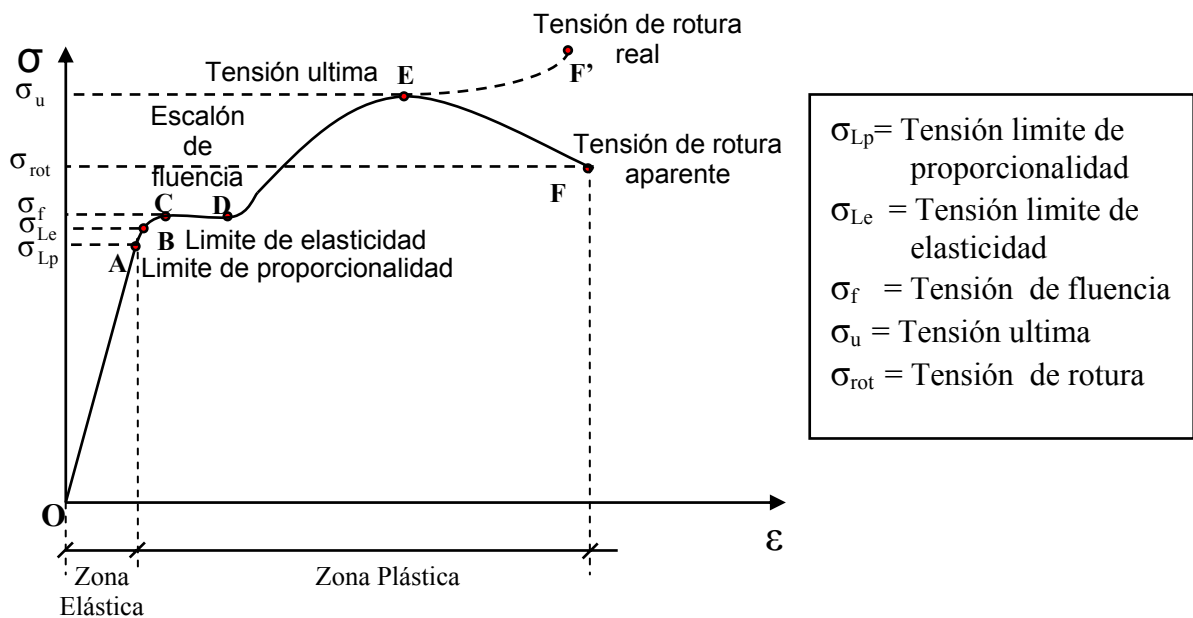
Máquina Universal

Consideremos una probeta de acero con contenido bajo de carbono (acero dulce), Con los valores obtenidos de fuerza y deformación mediante la maquina universal construyamos una tabla para calcular los valores de tensión y deformación unitaria, los cuales son graficados en un diagrama como mostramos a continuación.

**TABLA DE CALCULO DE  $\sigma - \epsilon$**

P	$\Delta L$	$\sigma = \frac{P}{A}$	$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$
0	0	0	0
100	0.002	180	0.0004
200	0.004	360	0.0008
300	0.006	540	0.0012
	0.008	720	0.0016
			0.0020

**DIAGRAMA ( $\sigma - \epsilon$ ) PARA EL ACERO DULCE**



## 2.4.2 Propiedades mecánicas

Del diagrama “Tensión – Deformación unitaria” del acero dulce podemos definir varios conceptos y propiedades del comportamiento mecánico de los materiales.

- **Límite de proporcionalidad (punto A):** Es el punto de la curva hasta donde la deformación unitaria es proporcional al esfuerzo aplicado. Al esfuerzo que caracteriza este punto se lo denomina Tensión Límite de Proporcionalidad ( $\sigma_{LP}$ ).

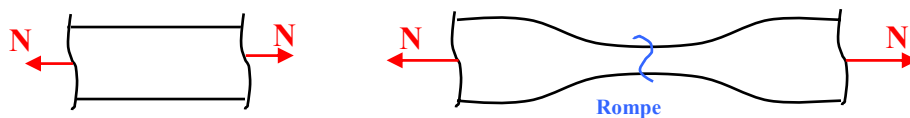
- **Límite de elasticidad (punto B):** Es el punto de la curva hasta donde el material es capaz de recuperar su deformación al quitarle la carga aplicada. Al esfuerzo que caracteriza este punto se lo denomina Tensión Límite de Elasticidad ( $\sigma_{Le}$ ).

- **Escalón de Fluencia (puntos C – D):** Un ligero aumento de esfuerzo mas allá del límite elástico provocara un colapso del material y esto ocasionara que se deforme permanentemente sin aumento sensible de carga a este comportamiento se lo llama fluencia. Al esfuerzo que caracteriza este escalón que muestra la curva se lo denomina Tensión de Fluencia ( $\sigma_{LP}$ ).

- **Resistencia ultima (punto E):** Cuando la fluencia ha terminado, puede aplicarse mas carga a la probeta debido a que en el interior del material a existido un reacomodo de partículas de tal manera que el material sufre un endurecimiento por deformación, dando como resultado una curva que se eleva continuamente hasta alcanzar el esfuerzo máximo. Al esfuerzo que caracteriza este punto se lo denomina Tensión Ultima ( $\sigma_u$ ).

- **Resistencia a la ruptura (punto F):** Es el esfuerzo basado en la sección original, que produce la ruptura o fractura del material. Al esfuerzo que caracteriza este punto se lo denomina **Tensión ruptura ( $\sigma_{rot}$ )**. O tensión de ruptura aparente.

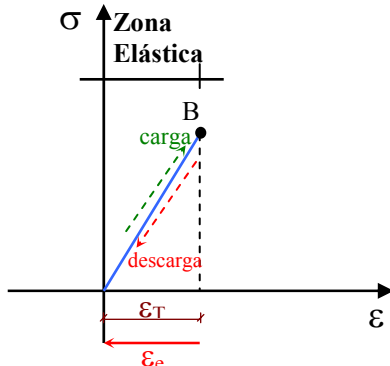
En la realidad lo que sucede es que el área de la sección transversal sufre una contracción en forma de cuello o garganta, cuya sección decrece hasta romperse. Si se calcula la tensión de rotura considerando el decrecimiento de la sección trasversal nos encontraríamos que el punto de ruptura de la curva es el **punto F'**, donde se presentaría la Tensión real de ruptura.



## 2.7.2 Ensayo de carga y descarga

### a) Estado Elástico

Cuando la probeta de acero dulce se somete a cargas y descargas sin alcanzar el punto B de la curva, podemos comprobar que el material es capaz de recuperar toda su deformación en el proceso descarga, lo cual nos supone que el material esta trabajando en un **Estado Elástico**.



Donde:

$\epsilon_T$  = Deformación total

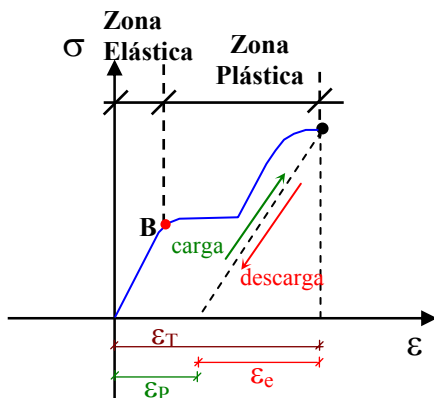
$\epsilon_e$  = Deformación elástica (deformación que el material es capaz de recuperar)

Se considera que un material es **elásticamente perfecto** cuando se cumple que la deformación unitaria total es igual a la deformación elástica, ósea que el material es capaz de recuperar toda su deformación.

$$\epsilon_T = \epsilon_e$$

### b) Estado Plástico

Cuando la probeta de acero dulce se somete a una carga más allá del punto B de la curva, podemos comprobar que el proceso de descarga, no es capaz de recuperar toda su deformación. Lo cual nos hace suponer que el material esta trabajando en **Estado Plástico**.



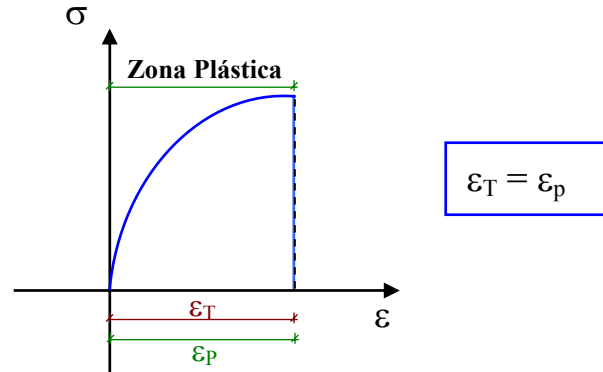
Donde:

$\epsilon_p$  = Deformación permanente o deformación plástica

(Deformación que el material no es capaz de recuperar)

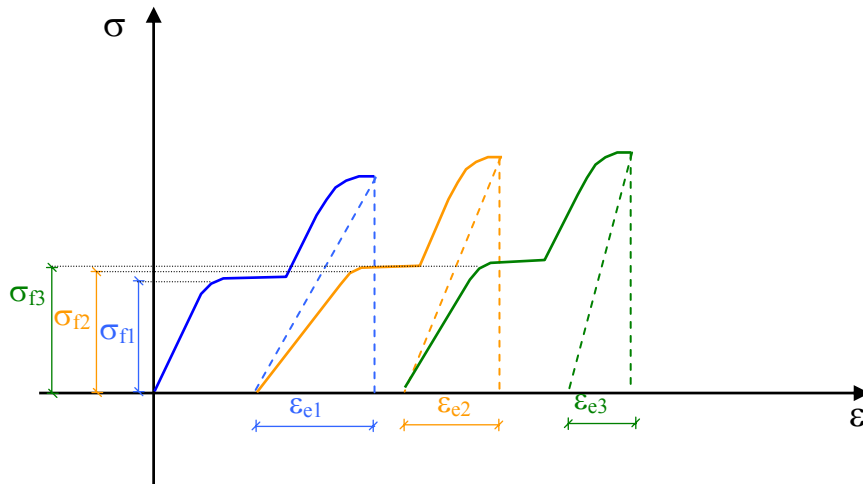
$$\epsilon_T = \epsilon_p + \epsilon_e$$

Se considera que un material es **Plásticamente Perfecto** cuando se cumple que la deformación unitaria total es igual a la deformación Plástica, ósea que el material no es capaz de recuperar deformación.



### 2.7.3 Cargas y descargas repetidas

Cuando la probeta de acero dulce se somete a cargas y descargas repetidas más allá del punto B de la curva, podemos comprobar el material pierde elasticidad pero gana resistencia, cuantas cargas y descargas se realicen.

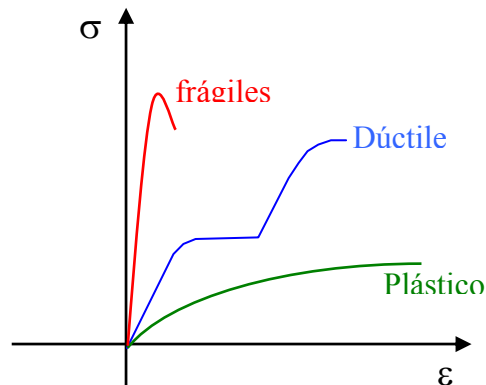


$$\sigma_{f1} < \sigma_{f2} < \sigma_{f3} < \dots < \sigma_{fn}$$

$$\epsilon_{e1} > \epsilon_{e2} > \epsilon_{e3} > \dots > \epsilon_{en}$$

## 2.5 Clasificación de los materiales de acuerdo a su características mecánicas

De acuerdo a sus a sus características mecánicas de los materiales podemos clasificar los materiales en tres grandes grupos, materiales frágiles, dúctiles y plástico.



**a) Materiales frágiles:** Sus características principales son las siguientes:

- A grandes tensiones pequeñas deformaciones.
- No acusa escalón de fluencia.
- Rotura brusca y sin contracción de la sección transversal.
- Ejemplo: vidrio, porcelana, rocas, etc.

**b) Materiales Plásticos:** Sus características principales son las siguientes:

- A pequeñas tensiones, grandes deformaciones
- No acusa escalón de fluencia
- Rotura suave y con contracción de la sección transversal.
- Ejemplo: plásticos, asfalto, arcilla húmeda, etc.

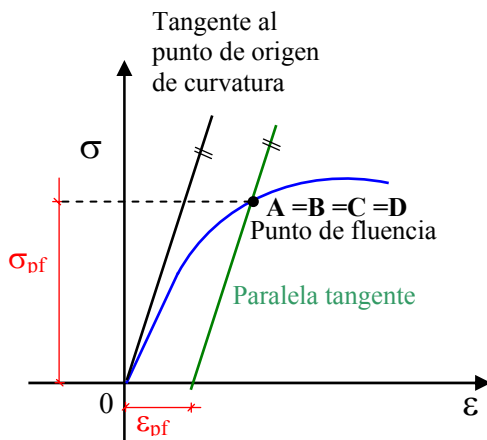
**c) Materiales Dúctiles:** Sus características principales son las siguientes:

- En su primer estado de deformación, la tensión es directamente proporcional a la deformación.
- Acusa escalón de fluencia
- Rotura suave y con contracción de la sección transversal.
- Ejemplos: acero dulce, latón, zinc, etc.

## 2.6 Límite convencional de fluencia.

Para materiales de curvas continuas en el diagrama Tensión – Deformación Unitaria, donde no es apreciable el escalón de fluencia, se han realizado en laboratorio muchos ensayos para determinar este valor representativo, como en la Sociedad Americana de Ensayo de Materiales (ASTM), donde se han adoptado valores de deformación unitaria, denominándolo límite convencional de fluencia, debe hacerse notar que la fluencia definida de tal manera no representa ninguna propiedad física, ni mecánica del material, tan solo sirve para encontrar un punto característico de la curva que nos permita comparar con otros materiales.

Para encontrar la tensión de fluencia se procede de la siguiente manera: se traza una tangente a la curva en el punto de origen y traslada dicha tangente paralelamente hasta el valor determinado por el límite convencional de fluencia, donde corta esta paralela a la curva consideraremos el punto de fluencia del material, que para este curso consideraremos que en ese punto coinciden los límites de proporcionalidad, elasticidad y el punto de Fluencia , reflejando dicho punto en el eje de las tensiones podemos encontrar la tensión de fluencia para materiales de curva continua.



Donde:

$\sigma_{pf}$  = tensión convencional de fluencia

$\epsilon_{pf}$  = Límite convencional de fluencia

El límite convencional de fluencia especificado para los aceros y aluminio es de 0.002 y para otros materiales se especifica valores que fluctúan entre 0.0005 (frágiles) y 0.0035 (plásticos) dependiendo de su curva característica.

## 2.7 Ley de Hooke

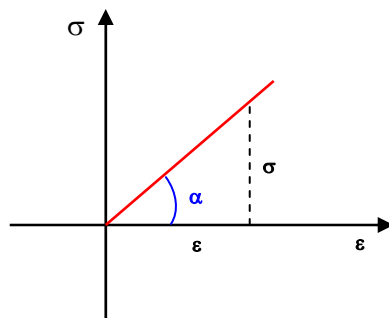
Como se observo en la sección anterior en estado elástico existe una relación lineal entre la tensión y la deformación unitaria (Hipótesis de dependencia lineal). Este hecho fue descubierto por Robert Hooke en 1676 y se conoce como la **Ley Hooke** que dice que la tensión es proporcional a la deformación unitaria, para que sea igual debe existir una constante de proporcionalidad, mas conocida como modulo de elasticidad o modulo de Young (E) en honor a Thomas Young que la introdujo en 1807, este modulo representa la medida de rigidez del material.

$$\text{Para el esfuerzo normal } \sigma \propto \varepsilon \Rightarrow \sigma = E * \varepsilon$$

$$\text{Para el esfuerzo cortante } \tau \propto \gamma \Rightarrow \tau = G\gamma$$

donde : E : Módulo de elasticidad longitudinal

G: Módulo de elasticidad transversal



$$\tan \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = \tan \alpha * \varepsilon \Rightarrow E = \tan \alpha$$

## 2.8 Ley complementaria de Hooke

Otra forma de ver expresada esta ecuación es de tal forma de relacionar la deformación ( $\Delta L$ ) en función de la fuerza aplicada (N).

Sabemos de las anteriores secciones que para esfuerzos normales, tenemos:

$$\sigma = \frac{N}{A_{\perp}} \dots\dots\dots 1$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L_N}{L} \dots\dots\dots 2$$

$$\sigma = E\varepsilon \dots\dots\dots 3$$

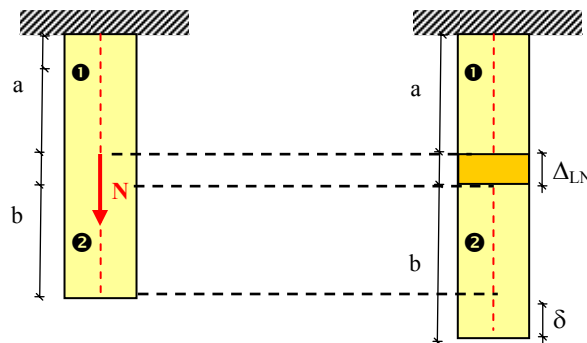
Reemplazando 1 y 2 en 3 tenemos:

$$\frac{N}{A_{\perp}} = E \frac{\Delta L_N}{L} \Rightarrow \boxed{\Delta L_N = \frac{N * L}{E * A_{\perp}}} \quad \begin{array}{l} \text{Ley complementaria de Hooke} \\ \text{para esfuerzos normales} \end{array}$$

De Igual manera se puede deducir para el esfuerzo cortante quedando la expresión de la siguiente manera:

$$\boxed{\Delta L_{\tau} = \frac{P * L}{G * A_{\parallel}}} \quad \begin{array}{l} \text{Ley complementaria de Hooke} \\ \text{para esfuerzos cortantes} \end{array}$$

Es bueno conceptuar entre la diferencia que existe entre deformación ( $\Delta L$ ) y desplazamiento ( $\delta$ ). La deformación es producto de un esfuerzo en el elemento que produce cambio de forma en el, en cambio el desplazamiento es producto del desplazamiento o deformación de otro elemento que no necesariamente implica cambio de forma, sino movimiento del elemento respecto a su posición original. Ver ejemplo a continuación:



El elemento ❶ se deforma ( $\Delta L$ )

❷ se desplaza ( $\delta$ )

## 2.9 Problemas

### Ejemplo 1:

Sea es sistema estructural mostrado en la figura, sometida a esfuerzos normales, determinar los diagramas de fuerzas Normales, Tensiones Normales y Desplazamientos.

#### Datos:

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

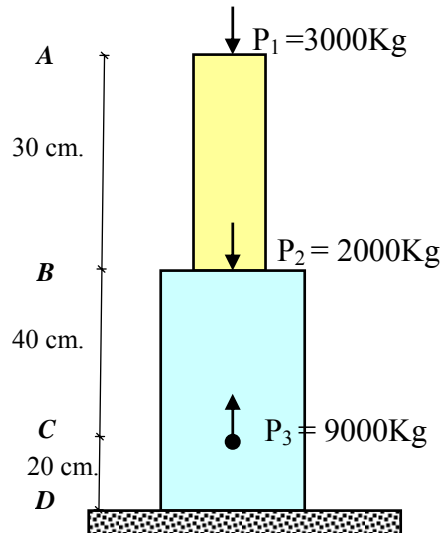
$$A_1 = 2 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 4 \text{ cm}^2$$

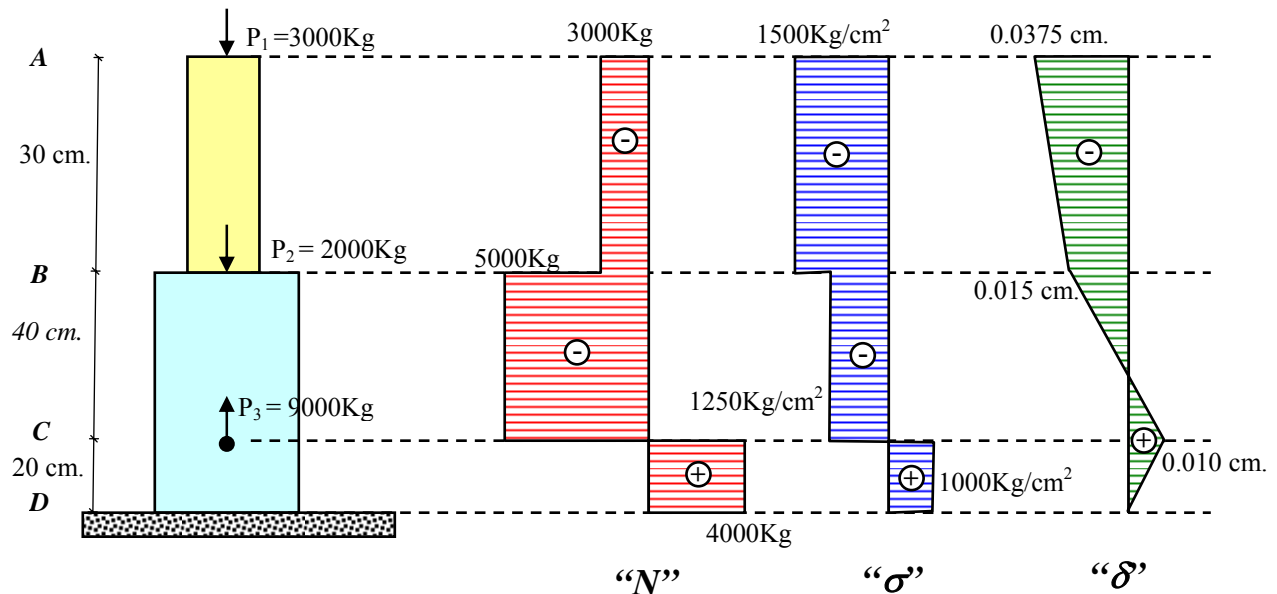
#### Incógnitas

#### Diagramas

“N”, “ $\sigma$ ”, “ $\delta$ ”



#### Solución



#### a) Fuerzas normales

Se diagrama directamente a partir del conocimiento de las cargas aplicadas.

**b) Tensiones Normales**

Tramo A - B

$$\sigma_{A-B} = \frac{N_{A-B}}{A_1} = \frac{3000}{2} = 1500 \frac{Kg}{cm^2} \quad (-)$$

Tramo B - C

$$\sigma_{B-C} = \frac{N_{B-C}}{A_2} = \frac{5000}{4} = 1250 \frac{Kg}{cm^2} \quad (-)$$

Tramo C - D

$$\sigma_{C-D} = \frac{N_{C-D}}{A_2} = \frac{4000}{4} = 1000 \frac{Kg}{cm^2} \quad (+)$$

**c) Deformaciones**

$$\Delta L = \frac{N * L}{E * A}$$

Tramo A - B

$$\Delta L_{A-B} = \frac{N_{A-B} * L_{A-B}}{E * A_1} = \frac{3000 * 30}{2 \times 10^6 * 2} = 0.0225 \text{ cm} \quad (\text{acorta})$$

Tramo B - C

$$\Delta L_{B-C} = \frac{N_{B-C} * L_{B-C}}{E * A_2} = \frac{5000 * 40}{2 \times 10^6 * 4} = 0.025 \text{ cm} \quad (\text{acorta})$$

Tramo C - D

$$\Delta L_{C-D} = \frac{N_{C-D} * L_{C-D}}{E * A_2} = \frac{4000 * 20}{2 \times 10^6 * 4} = 0.010 \text{ cm} \quad (\text{alarga})$$

**d) Desplazamientos**

Partimos donde la deformación es cero, o sea en el empotramiento.

Sección D - D

$$\delta_{D-D} = 0$$

Sección C - C

$$\delta_{C-C} = \delta_{D-D} + \Delta L_{C-D} = 0 + 0.010 = 0.010 \text{ cm} \quad (+)$$

Sección B - B

$$\delta_{B-B} = \delta_{C-C} + \Delta L_{B-C} = 0.010 - 0.025 = -0.015 \text{ cm} \quad (-)$$

Sección A-A

$$\delta_{A-A} = \delta_{B-B} + \Delta l_{A-B} = -0.015 - 0.0225 = -0.0375 \text{ cm } (-)$$

**Ejemplo 2:**

Sean dos barras de acero (elásticas) que soportan una carga como indica la figura, determinar el desplazamiento vertical y horizontal del punto B.

**Datos:**

$$E = 2 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

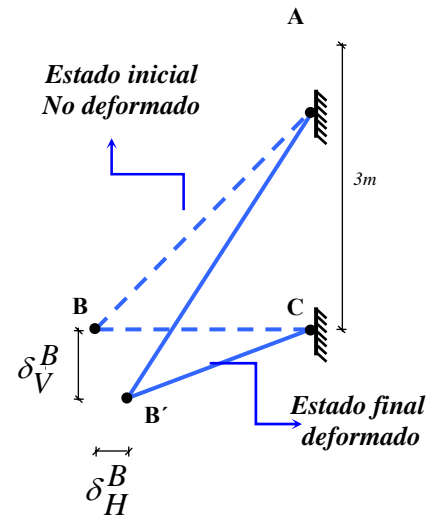
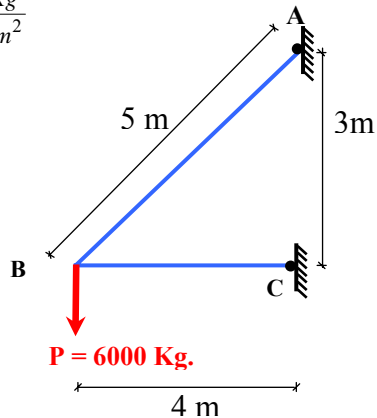
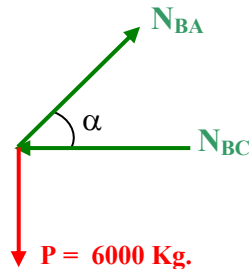
$$A_{AB} = 4 \text{ cm}^2$$

$$A_{BC} = 6 \text{ cm}^2$$

**Incógnitas**

$$\delta_H^B = ?$$

$$\delta_V^B = ?$$

**Solución:****a) Fuerzas en las barras**

$$\sum F_V = 0$$

$$N_{BA} \sin \alpha - 6000 = 0$$

$$N_{BA} = \frac{6000}{\sin \alpha} = \frac{6000}{\frac{3}{5}}$$

$$N_{BA} = 10000 \text{ Kg} \quad (\text{Tracción})$$

$$\sum F_H = 0$$

$$N_{BA} \cos \alpha - N_{BC} = 0$$

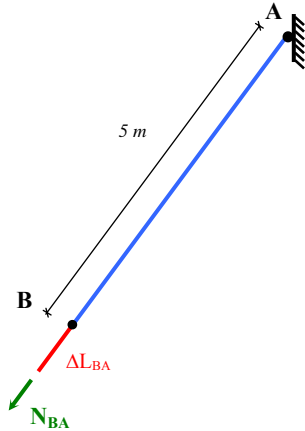
$$N_{BC} = N_{BA} \cos \alpha$$

$$N_{BC} = N_{BA} \cos \alpha$$

$$N_{BC} = 8000 \text{ Kg} \quad \Rightarrow \quad N_{BC} = 8000 \text{ Kg} \quad (\text{Compresión})$$

**b) Deformaciones en las barras**

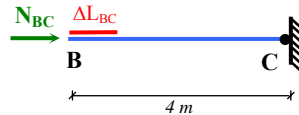
$$\Delta L = \frac{N * L}{E * A}$$

**b<sub>1</sub>) barra BA**

$$\Delta L_{BA} = \frac{N_{BA} * L_{BA}}{E * A_{BA}}$$

$$\Delta L_{BA} = \frac{10000 * 500}{2 \times 10^6 * 4}$$

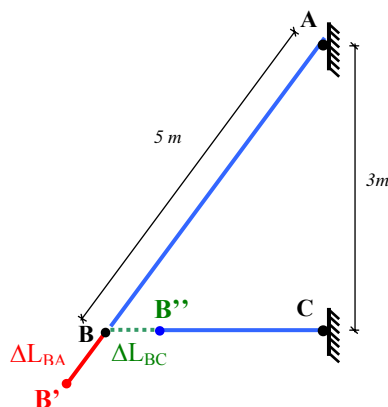
$$\Delta L_{BA} = 0.625 \text{ cm} \quad (\text{Alargamiento})$$

**b<sub>1</sub>) barra BC**

$$\Delta L_{BC} = \frac{N_{BC} * L_{BC}}{E * A_{BC}}$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{8000 * 400}{2 \times 10^6 * 6}$$

$$\Delta L_{BC} = 0.267 \text{ cm} \quad (\text{Acortamiento})$$

**d) Desplazamiento del punto B****Fig. 1**

Para comprender el efecto que producen las deformaciones de las barras sobre el desplazamiento del punto B, es necesario que en el proceso de su movimiento, las barras cumplan con dos condiciones:

- Mantener las dimensiones de las barras deformadas.
- Mantener unidas las barras en el punto B

Para lograr esto, imaginemos por un momento desconectadas entre si las barras BA y BC, de tal manera que estas se puedan deformar libremente hasta los puntos B' y B'', como muestra la figura 1.

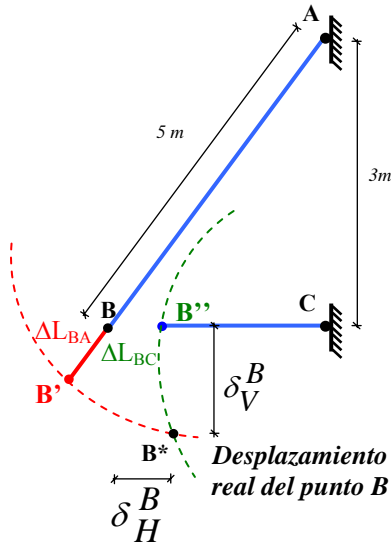
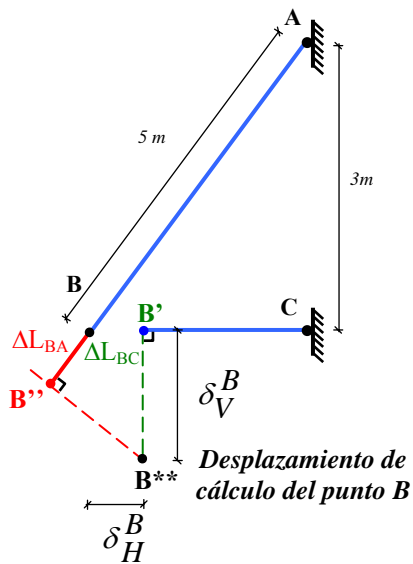


Fig. 2

La única solución que existe para mantener las barras deformadas y unidas en el punto B, es rotarlas las barras sobre sus apoyos fijos A y C. Donde se intercepten estas rotaciones será el **punto real de desplazamiento del punto B (punto B\*)**. Ver Fig. 2



En la práctica los arcos engendrados por las rotaciones pueden ser remplazados por rectas perpendiculares, sin error apreciable, debido que tanto las rotaciones como las deformaciones son pequeñas. Donde se interceptan estas rectas será el **punto de desplazamiento de cálculo (punto B\*\*)**

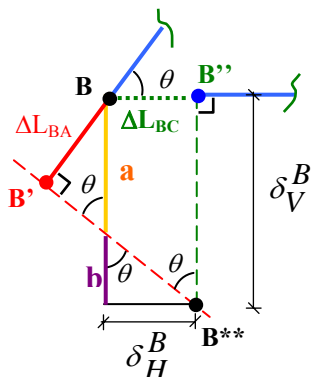
**b1) Alternativa de solución 1:** Realizando una comparación de triángulos se obtiene las ecuaciones de solución:

$$\delta_H^B = \Delta L_{BC} = 0.267 \text{ cm}$$

$$\delta_V^B = a + b$$

$$\text{Donde: } a = \frac{\Delta L_{BA}}{\sin \theta} \text{ y } b = \frac{\Delta L_{BC}}{\tan \theta} \text{ si } \tan \theta = \frac{\Delta L_{BC}}{b}$$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

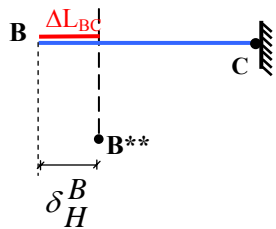


$$\delta_V^B = \frac{\Delta L_{BA}}{\text{sen } \theta} + \frac{\Delta L_{BC}}{\tan \theta}$$

$$\delta_V^B = \frac{0.625}{\frac{3}{5}} + \frac{0.267}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{\delta_V^B = 1.398 \text{ cm}}$$

**Alternativa de solución 2:** Este método consiste en poner la deformación, en función de los desplazamientos:  $\Delta L_i = f(\delta_H, \delta_V)$

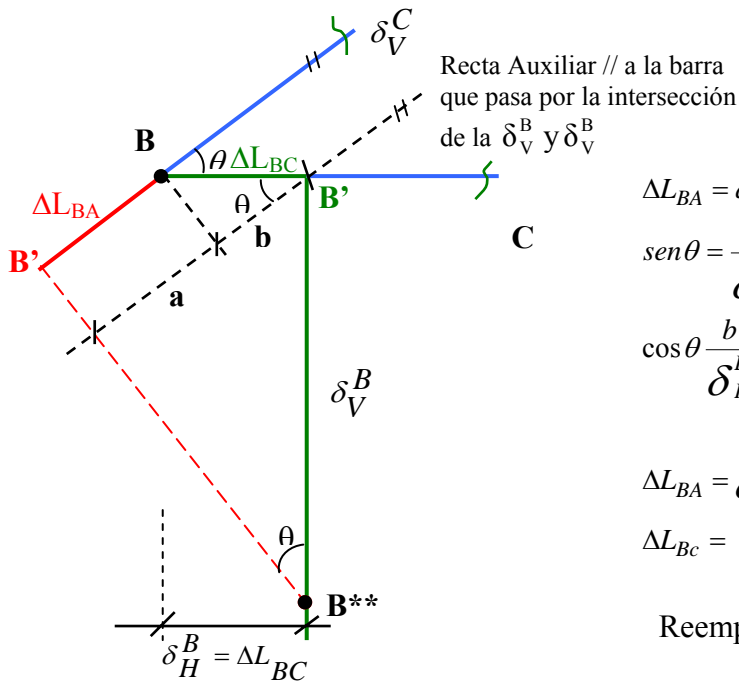
### Barra BC



$$\Delta L_{BC} = \delta_H^B = 0.267 \text{ cm}$$

①

### Barra BA



$$\Delta L_{BA} = a - b$$

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{\delta_V^B} \rightarrow a = \delta_V^B \text{sen } \theta$$

$$\cos \theta \frac{b}{\delta_H^B} \rightarrow b = \delta_H^B \cos \theta$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_{BA} &= \delta_V^B \text{sen } \theta - \delta_H^B \cos \theta \\ \Delta L_{BC} &= 0 - \delta_H^B \end{aligned} \right\} \text{② Sistema de ecuaciones}$$

Reemplazando ① en ②

$$\Delta L_{BA} = \delta_V^B \text{sen } \theta - \Delta L_{BC} \cos \theta$$

Despejando  $\delta_V^B$

$$\delta_V^B = \frac{\Delta L_{BA}}{\text{sen } \theta} + \frac{\Delta L_{BC}}{\tan \theta}, \text{ entonces } \boxed{\delta_V^B = 1.398 \text{ cm}}$$

**Ejemplo 3:**

Sea el sistema estructural mostrado en la figura, determinar el desplazamiento vertical del punto A y las tensiones en las barras elásticas.

**Datos:**

$$q = 2000 \text{ Kg/m.}$$

$$P_1 = 6000 \text{ Kg.}$$

$$P_2 = 8000 \text{ Kg.}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_1 = A_3 = 4 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 6 \text{ cm}^2$$

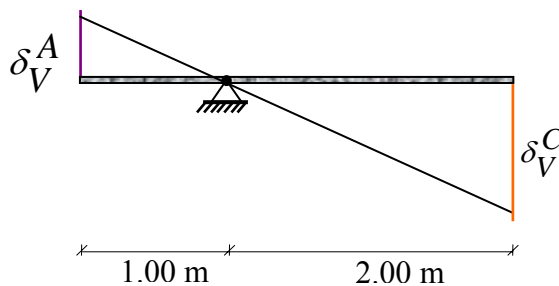
**Incógnitas**

$$\delta_A^V = ?$$

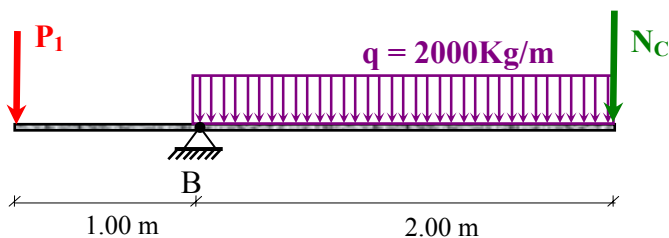
$$\sigma_1 = ?$$

$$\sigma_2 = ?$$

$$\sigma_3 = ?$$

**Solución:****a) Ecuación de comparación de deformaciones.**

$$\frac{\delta_V^A}{1} = \frac{\delta_V^C}{2} \Rightarrow \delta_V^C = 2\delta_V^A$$

**b) Cálculo de esfuerzos en las barras**

$$\sum M_B = 0$$

$$N_C * 2 + 2000 * 2 * 1 = 6000 * 1$$

$$N_C = 1000 \text{ Kg}$$

Analizando cada barra por separado:

**Barra 1**



$$\begin{aligned}\sum F_V &= 0 \\ N_C - N_1 &= 0 \\ N_1 &= N_C\end{aligned}$$

$$N_1 = 1000 \text{ Kg} \quad (\text{Compresión})$$

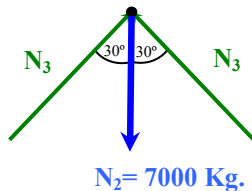
**Barra 2**



$$\begin{aligned}\sum F_V &= 0 \\ N_C + N_2 - P_2 &= 0 \\ N_2 &= 8000 - 1000\end{aligned}$$

$$N_2 = 7000 \text{ Kg} \quad (\text{Tracción})$$

**Barra 3**



$$\begin{aligned}\sum F_V &= 0 \\ 2N_3 \cos 30^\circ - N_2 &= 0 \\ N_3 &= \frac{7000}{2 * \cos 30^\circ}\end{aligned}$$

$$N_3 = 4041.45 \text{ Kg} \quad (\text{Compresión})$$

Se han calculado sus fuerzas internas, para determinar sus deformaciones y finalmente sus desplazamientos

**b) Deformaciones:**

$$\Delta L = \frac{N * L}{E * A}$$

**Barra 1**

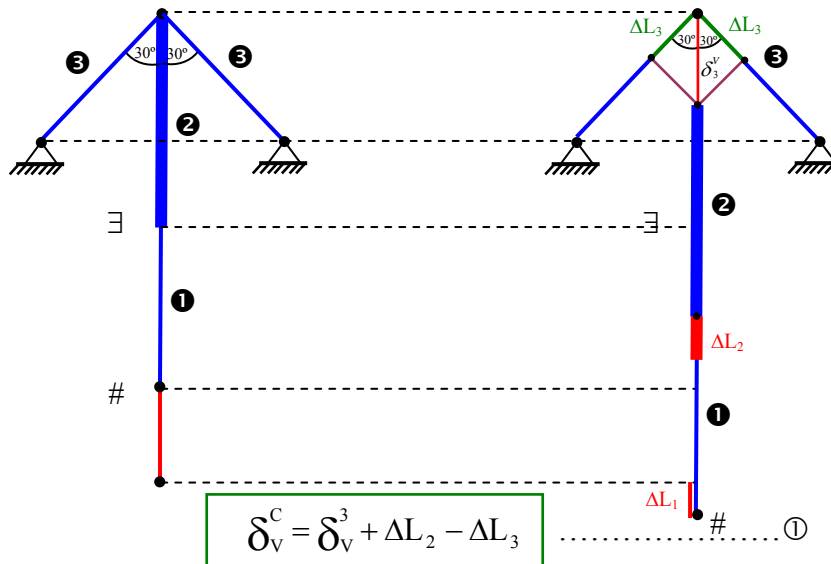
$$\Delta L_1 = \frac{N_1 * L_1}{E * A_1} = \frac{1000 * 120}{2 * 10^6 * 4} = 0.015 \text{ cm} \quad (\text{acorta})$$

**Barra 2**

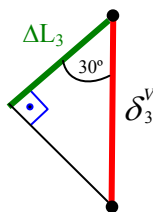
$$\Delta L_2 = \frac{N_2 * L_2}{E * A_2} = \frac{7000 * 80}{2 \times 10^6 * 6} = 0.047 \text{ cm} \quad (\text{alarga})$$

**Barra 3**

$$\Delta L_3 = \frac{N_3 * L_3}{E * A_3} = \frac{4041.45 * \frac{80}{\cos 30^\circ}}{2 \times 10^6 * 4} = 0.047 \text{ cm} \quad (\text{acorta})$$

**c) Desplazamiento del punto C**

En el gráfico podemos observar el siguiente triángulo:



$$\cos 30^\circ = \frac{\Delta L_3}{\delta_3^V}$$

$$\delta_3^V = \frac{\Delta L_3}{\cos 30^\circ}$$

Reemplazando en la ecuación ① tenemos:

$$\delta_V^C = \frac{\Delta L_3}{\cos 30^\circ} + \Delta L_2 - \Delta L_3$$

$$\delta_V^C = \frac{0.047}{\cos 30^\circ} + 0.047 - 0.015$$

$$\delta_V^C = 0.086 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \delta_V^A = \frac{\delta_V^C}{2} = 0.043 \text{ cm}$$

**d) Tensiones:**

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{1000}{4} = 250 \frac{Kp}{cm^2} \quad \text{compresión}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{7000}{6} = 1166 \frac{Kp}{cm^2} \quad \text{tracción}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{4041.45}{4} = 1010 \frac{Kp}{cm^2} \quad \text{compresión}$$

**Ejemplo 4:**

Sea la barra de sección constante, determinar su deformación debido a su peso propio.

**Datos:**

$\gamma$  = Peso específico

$A$  = Área

$L$  = Longitud

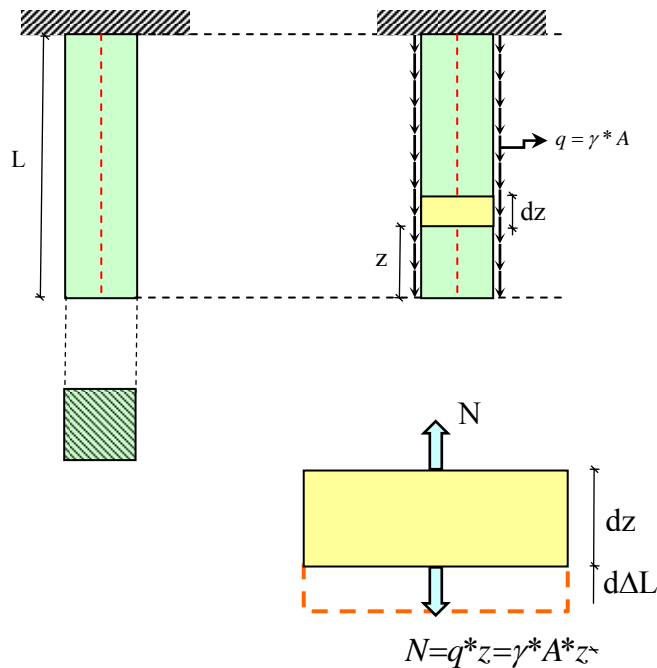
**Incógnitas**

$$\Delta L_G = ?$$

**Solución:**

Extrayendo el diferencial:

$$\Delta L = \frac{N * L}{E * A}$$



$$\int_0^{\Delta L_G} d\Delta L_G = \int_0^L \frac{\gamma * A * z dz}{E * A} \longrightarrow \Delta L_G = \frac{\gamma}{E} * \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^L$$

$$\Delta L_G = \frac{\gamma * L^2}{2E}$$

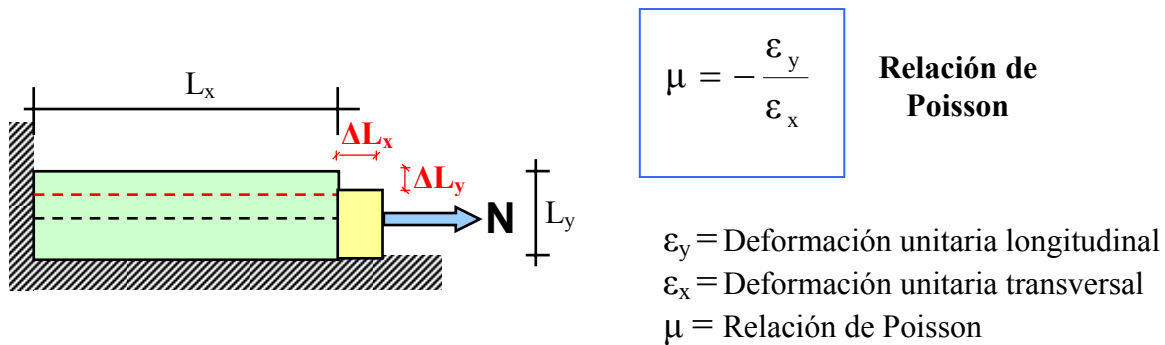
Si el peso es :  $G = \gamma * L * A \longrightarrow \Delta L_G = \frac{\gamma * L * L * A}{2E * A}$

$$\Delta L_G = \frac{G * L}{2E * A}$$

Deformación debido al peso propio de sección

## 2.10 Relación de Poisson

Otro tipo de deformación elástica que se produce en un sólido deformable es la variación de las dimensiones transversales producto del sometimiento del mismo a una fuerza de tracción o compresión axial. En efecto se comprueba experimentalmente que si una barra se alarga por una tracción axial, sufre una reducción de sus dimensiones transversales. Poisson, físico matemático Francés comprobó en el año 1811 que debajo del límite de proporcionalidad la relación entre la deformación unitaria longitudinal con respecto a la deformación transversal es constante y la definió de la siguiente manera:



## 2.11 Ley generalizada de Hooke

La relación de Poisson permite generalizar la ley de Hooke para un estado tridimensional de tensiones (ejes X,Y, Z), imaginémosnos un elemento tridimensional sometido a fuerzas en sus tres direcciones, y analicemos que sucede por ejemplo con la deformación sobre el eje X, el elemento debido a su fuerza axial sobre el eje X, este se alargara sobre el eje X, pero debido a las fuerzas aplicadas en los otros dos ejes restantes (ejes Y, Z) según Poisson acortara la deformación sobre el eje X, quedando la deformación unitaria sobre el eje X expresada de la siguiente manera:

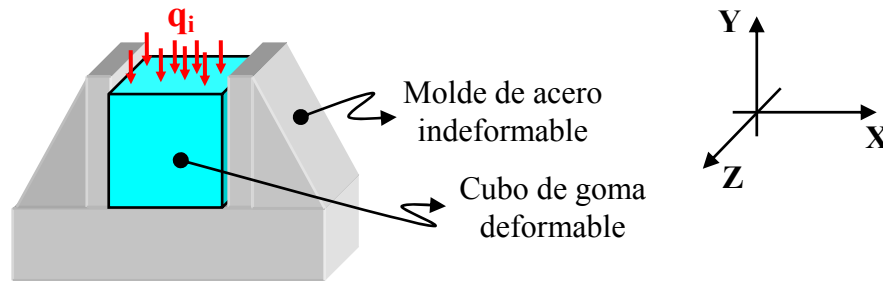
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \text{LEY DE GENERALIZADA HOOKE}$$

⊕ Tracción-Alargamiento

⊖ Compresión-Acortamiento

**Ejemplo 5:**

Sea un cubo de goma deformable que se introduce libremente sin holgura en un molde de acero indeformable. El cubo de goma en su cara superior está sometido a una presión uniformemente repartida ( $q_i$ ), como muestra la figura. Determinar las tensiones normales y deformaciones unitarias en sus tres direcciones (X, Y, Z).

**Solución:**

Antes de aplicar las ecuaciones de la ley generalizada de Hooke, analicemos como se producen las tensiones y deformaciones en el cubo de goma de forma general.

- Dirección X

$\epsilon_x = 0$  Debido a que en esa dirección el molde de acero le impide deformarse al cubo de goma.

$\sigma_x \neq 0$  Ósea existe tensión debido que al impedir el molde de acero que se deforme el cubo de goma esto hace que se produzca tensión.

- Dirección Y

$\epsilon_y \neq 0$  Debido a que en esa dirección el molde de acero no impide deformarse al cubo de goma.

$\sigma_y = -q_i$  Debido al equilibrio que debe existir en esa dirección.

- Dirección Z

$\epsilon_z \neq 0$  Debido a que en esa dirección el molde de acero no impide deformarse al cubo de goma.

$\sigma_z = 0$  Debido a que la goma puede en esta dirección libremente sin que nadie interrumpa este proceso, es que no se produce tensión en esta dirección.

Del análisis realizado podemos concluir lo siguiente:

$\begin{aligned}\epsilon_x &= 0 \\ \sigma_y &= -q_i \\ \sigma_z &= 0\end{aligned}$	<b>Conocidas</b>	$\begin{aligned}\sigma_x &\neq 0 \\ \epsilon_y &\neq 0 \\ \epsilon_z &\neq 0\end{aligned}$	<b>Incógnitas</b>
--	------------------	--	-------------------

Aplicando este análisis a la ley generalizada de Hooke se encuentran las incógnitas:

### 1<sup>era</sup> Ecuación

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

Remplazando las expresiones conocidas se tiene:

$$0 = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(-q_i + 0)] \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma_x = -\mu q_i}$$

### 2<sup>era</sup> Ecuación

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

Remplazando las expresiones conocidas se tiene:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [-q_i - \mu(-\mu q_i + 0)] \quad \longrightarrow \quad \boxed{\epsilon_y = \frac{q_i}{E} (\mu^2 - 1)}$$

### 3<sup>era</sup> Ecuación

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Remplazando las expresiones conocidas se tiene:

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [0 - \mu(-\mu q_i + q_i)] \quad \longrightarrow \quad \boxed{\epsilon_z = \frac{\mu q_i}{E} (\mu - 1)}$$

## 2.12 Tensiones Admisibles y peligrosas

La tensión real de trabajo que soporta el material bajo la acción de unas cargas, no debe sobrepasar a la tensión admisible, que es la máxima a la que puede ser sometido el material con cierto grado de seguridad en la estructura o elemento que se considere, por consiguiente la Tensión admisible queda definida de la siguiente manera:

$$\sigma_{\text{Adm}} = \frac{\sigma_o}{n}$$

Donde:  $\sigma_{\text{Adm}}$  = Tensión Admisible  
 $\sigma_o$  = Tensión peligrosa  
 $n$  = Coeficiente de seguridad

### 2.11.1 Tensión peligrosa

En un proyecto real la tensión admisible debe ser siempre menor al límite de proporcionalidad, con el objeto de que se pueda aplicarse en todo momento la relación lineal entre tensiones y deformaciones que establece la ley de Hooke, y es la base de toda la teoría propuesta. Sin embargo, es muy difícil determinar el límite de proporcionalidad, y se toma como tensión peligrosa a la tensión fluencia, sabiendo que el coeficiente de seguridad nos garantiza que el material este trabajando por debajo del límite de proporcionalidad. Quedado de finida de la siguiente manera:

a) Para materiales con escalón de fluencia

$$\sigma_o = \sigma_f$$

$\sigma_f$  = tensión de fluencia

b) Para materiales sin escalón de fluencia

$$\sigma_o = \sigma_{pf}$$

$\sigma_{pf}$  = tensión convencional de fluencia

### 2.11.2 Coeficiente de seguridad “n”

Son muchos los factores que influyen para adoptar el coeficiente de seguridad, a continuación enunciaremos algunos:

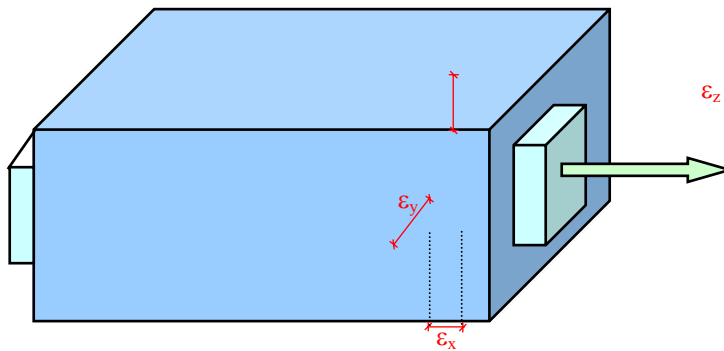
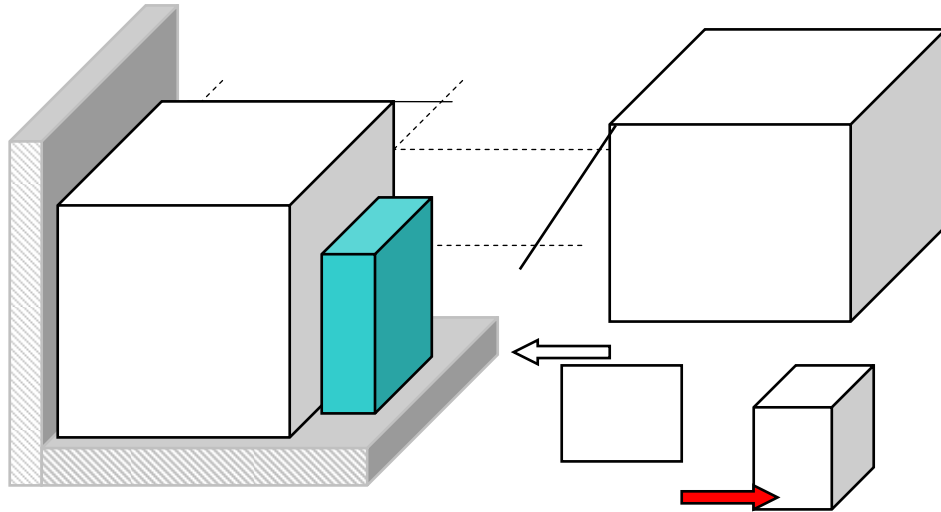
a) Conocimiento del comportamiento físico y mecánico del material (continuidad, homogeneidad, isotropía, etc.)

- b) Uso que se le va ha dar a la estructura
- c) La fiscalización y supervisión.
- d) Método de cálculo utilizado para el diseño
- e) Errores numéricos y aproximaciones realizadas.
- f) Perfecta evaluación de las cargas

Como referencia:

Para materiales con escalón de fluencia:  **$n = 1.10 - 1.70$**

Para materiales sin escalón de fluencia:  **$n = 1.80 - 4.00$**



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$